オプション講座 「アンリ・カルタン『複素函数論』を読む」[*] 第 3 回 講義報告[†]

数学工房[‡]

2008 年 6 月 11 日　19：00 〜 21：00

概要

収束ベキ級数を論ずる前に，まず，複素数体について基本的な事項を整理した後，複素平面 $\mathbb{C}$ の完備性に関して，完備，Cauchy 列，点列の収束，さらに級数の絶対収束などの重要な概念につき解説した．そして，関数項の級数の収束に関して，点毎収束，ノルム（正規）収束などの諸概念とともに，一様収束に関する概念の歴史的変遷についても解説した．

1　収束ベキ級数

1.1　複素数体

これまでの形式的ベキ級数においては，体 K は一般の可換体でもよかったが，これからは，体 K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に限定する．

1.1.1　複素数

写像 Ψ によって，複素数と実平面を同一視する．すなわち，

$$\Psi : \mathbb{C} \ni x + iy \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は，加法とスカラー倍について同型（線形空間としての同型写像）である．

1.1.2　共役複素数

共役の写像

$$\theta : \mathbb{C} \ni \underbrace{x + iy}_{= z} \longmapsto \underbrace{x - iy}_{= \bar{z}} \in \mathbb{C}$$

$\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ は自己同型である．すなわち，

---

[*] 本講座では，Henri Cartan 著「複素函数論」を教科書として，複素解析の基礎を学習する．予習・復習を前提とし，読みにくい場所，問題にしていることは何か，そこに至る背景は何かなどといったことに焦点を絞り解説する．高橋禮司訳（岩波書店）の本は絶版であるが，古書として入手可能である．

[†] reported by S.K.

[‡] http://www.sugakukobo.com

1) $\theta(z+w)=\theta(z)+\theta(w)$ i.e. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
2) $\theta(zw)=\theta(z)\theta(w)$ i.e. $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$
3) $\theta(1)=1$
4) $(\theta\circ\theta)(z)=z$ i.e. $\bar{\bar{z}}=z$
$\therefore\quad \theta\circ\theta=id$ i.e. $\theta=\theta^{-1}$

複素数 z の**実部**と**虚部**は，共役複素数を使って，次のように表される．すなわち，

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ \mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$$

1.1.3 複素数の絶対値

複素数 $z\ (=x+iy)$ の絶対値は，$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$ よりも，

$$|z|:=\sqrt{z\bar{z}}$$

の表現の方が，複素平面上の幾何で有用である．

1.1.4 絶対値の性質

絶対値の性質

$$\begin{cases} 0^\circ & |z|\geqq 0,\quad |z|=0 \implies z=0 \\ 1^\circ & |z+w|\leqq |z|+|w| \\ 2^\circ & |zw|=|z||w| \\ 3^\circ & |1|=1 \end{cases}$$

のなかで，2° は，ユークリッドノルムとの決定的な違いで重要であり，次のように一般化される．すなわち，

$$|z_1z_2\cdots z_m|=|z_1||z_2|\cdots|z_m|$$

例題 1.1

$$|zw|=|z||w|$$

を示せ．

系 1.1 複素平面上の単位円 U は

$$U:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$$

で定義される．このとき，

$$\begin{cases} 1^\circ & z,w\in U \Longrightarrow zw\in U \\ 2^\circ & 1\in U \\ 3^\circ & z\in U \implies z^{-1}\in U \end{cases}$$

が成立する．$\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\backslash\{\mathbf{0}\}$ を乗法に関する可換群とすると，単位円 U は $\mathbb{C}^\times$ の部分群である．

系 1.1 を証明した．

1.2　$\mathbb{C}$ の完備性

1.2.1　絶対値によって定まる距離

絶対値によって，体 $\mathbb{C}$ のなかに一つの距離を入れる．すなわち，
$\mathbb{C} \ni z, w$ について，

$$\rho(z, w) := |z - w|$$

と定める．これは，平面 $\mathbb{R}^2$ でのユークリッド距離に外ならない．この距離に関して，$\mathbb{C}$ は完備である．これを，距離空間 $(\mathbb{C}, \rho)$ は完備であるという．

1.2.2　完備

定義 1.1 距離空間 X において，どんな Cauchy 列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も X のある点に収束するとき，X は**完備**（complete）であるという．

1.2.3　Cauchy 列

定義 1.2 $\mathbb{C}$ の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Cauchy 列**であるとは，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |z_n - z_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{for } \forall n \geqq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}_0$$

が成立することである．

1.2.4　点列の収束

定理 1.1 点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する必要十分条件は，$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることである．

定理 1.1 を証明した．

1.2.5　絶対収束

定理 1.2 複素数の級数 $\displaystyle\sum_{\nu} u_\nu$ に対して，

$$\sum_{\nu} |u_\nu| < \infty \quad \cdots \quad [\star]$$

が成立するとき，$\displaystyle\sum_{\nu} u_\nu$ は収束する．この条件 $[\star]$ を満たすとき，$\displaystyle\sum_{\nu} u_\nu$ は**絶対収束**するという．絶対収束級数については，さらに，

$$\left|\sum_{\nu\geq 0} u_\nu\right| \leqq \sum_{\nu\geq 0} |u_\nu|$$

が成り立つ．

定理 1.2 を証明した．

例題 1.2 絶対収束級数について，

$$\left|\sum_{\nu\geq 0} u_\nu\right| \leqq \sum_{\nu\geq 0} |u_\nu|$$

が成立することを示せ．

1.3　関数項の級数の収束に関する諸概念

$E \neq \phi$；任意の集合

$\mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$; 集合 E で定義された複素数値関数全体の作る可換代数（多元環）

$u, v \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ とする．

$$\begin{cases} (u+v)(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{c}u)(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{c}(u(\boldsymbol{x})) \\ (uv)(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x}) \\ 1_E(\boldsymbol{x}) = 1 \end{cases} \qquad (\boldsymbol{x} \in E)$$

1.3.1　点毎収束

定義 1.3 関数列 $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ について，$u, u_\nu \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ とする．このとき，u_ν が u に**点毎収束**（pointweise convergence）するとは，

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \lim_{\nu \to \infty} u_\nu(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$$

が成立することである．

1.3.2　スープ・ノルム

定義 1.4 関数 $u \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ に対して，**スープ・セミノルム**（sup-seminorm）を導入する．すなわち，

$$\|u\|_E := \sup_{\boldsymbol{x} \in E} |u(\boldsymbol{x})|$$

1.3.3　有界関数

集合 E 上の複素数値有界関数全体の作る空間

$$\mathcal{B}(E, \mathbb{C}) = \{u \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C}) \mid \exists M > 0 \;\text{ s.t. }\; |u(\boldsymbol{x})| \leqq M \;\text{ for } \forall \boldsymbol{x} \in E\}$$

は，$\mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ の部分代数である．ここで，スープ・セミノルムが有界であれば，その関数は E 上有界である．すなわち，

$$\|u\|_E < \infty \iff \exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |u(\boldsymbol{x})| \leqq M \quad \text{for } \forall \boldsymbol{x} \in E$$

また，$\mathcal{B}(E, \mathbb{C}) \ni u \longmapsto \|u\|_E \in \mathbb{R}$ は，ノルム関数である．

1.3.4　スープ・ノルムの性質

1° $0 \leqq \|u\|_E < +\infty$

$\|u\|_E = 0 \iff u = O_E$　ただし，零写像 $O_E(\boldsymbol{x}) = 0$ for $\forall \boldsymbol{x} \in E$

2° $\|\lambda u\|_E = |\lambda| \|u\|_E$

3° $\|u + v\|_E \leqq \|u\|_E + \|v\|_E$

4° $\|uv\|_E \leqq \|u\|_E \|v\|_E$　積に対して，この性質が入る．

1°〜4° により，$\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ はノルム環となる．

1.3.5 ノルム（正規）収束

定義 1.5 $\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ に対して，

$$\sum_{\nu\geq 0} \|u_\nu\|_E < \infty$$

となるとき，$\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ は**ノルム収束**の意味で収束するという．

1.4 一様収束概念の歴史的変遷

1.4.1 一様収束の現代的定義

関数列 $u_\nu \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ が E 上一様収束するとは，$u \in \mathrm{Map}(E, \mathbb{C})$ が存在して，

$$\|u_\nu - u\|_E \longrightarrow 0 \quad (\nu \to \infty)$$

が成立することを意味する．一様収束であれば，点毎に収束するが，しかし，逆は言えない．

例題 1.3 $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ が u に一様収束すれば，点毎収束

$$u_\nu \longrightarrow u \quad (\nu \to \infty)$$

が成立する．

□ これを，$u_\nu \rightrightarrows u$ in E $(\nu \to \infty)$ とも書く．

1.4.2 一様収束の古典的定義

関数列 $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ が u に E 上一様収束するとは，

$$\forall\varepsilon > 0\,; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |u_\nu(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})| < \varepsilon \quad \text{for } \forall\nu \geqq n_0$$

が，$\boldsymbol{x} \in E$ に無関係に成立することである．

例題 1.4 一様収束の古典的定義と現代的定義の同値性を示せ．

命題 1.1 $\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ がノルム収束，すなわち，$\sum_{\nu\geq 0} \|u_\nu\|_E < \infty$ であるとき，$\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ は収束し，点毎に絶対収束する．しかも，この収束は一様である．

命題 1.1 を証明した．